Universität Konstanz
Fachbereich Informatik & Informationswissenschaft
Prof. Dr. Ulrik Brandes / Dr. Sabine Cornelsen

Zeichnen von Graphen
SS 2004

4. Übungsblatt

Ausgabe: 11. Mai 2004 **Abgabe:** 19. Mai 2004, 12 Uhr
Die Bearbeitung in Zweiergruppen ist ausdrücklich erwünscht.

Aufgabe 1: 4 Punkte

Eine Klasse von Graphen $G_n = (V_n, E_n)$ sei rekursiv definiert durch

- $V_0 = \{s_0, t_0\}$ und $E_0 = \{(s_0, t_0)\}$.
- $V_n = V_{n-1} \cup \{s_n, t_n\}$ und $E_n = E_{n-1} \cup \{(t_{n-1}, t_n), (s_n, s_{n-1}), (s_{n-1}, t_n), (s_n, t_n)\}$.

Die Einbettung von G_n sei so, dass (s_{n-1}, t_n) auf der rechten Seite der Einbettung von G_{n-1} liegt und (s_n, t_n) auf der linken Seite.

(a) Zeigen Sie, dass die Graphen G_n serien–parallel sind.

(b) Sei $\mathrm{A}(G_n)$ der Platzverbrauch einer aufwärtsgerichteten, einbettungserhaltenden, geradlinigen Zeichnung von G_n. Zeigen Sie

$$\mathrm{A}(G_n) \geq 4 \cdot \mathrm{A}(G_{n-1}).$$

Hinweis: Betrachten Sie die Horizontalen durch s_{n-1} und t_{n-1}, sowie die Gerade durch s_{n-1} und s_{n-2}. Überlegen Sie sich, wo t_n und s_n liegen können und betrachten Sie dann die Gerade durch t_n und t_{n-1}.

(c) Schließen Sie nun, dass $\mathrm{A}(G_n) \in \Omega(4^n)$.

Aufgabe 2: 4 Punkte

Auf einem Graphen seien zwei Typen von Reduktionen definiert.

Serielle Reduktion Sei v ein Knoten mit Außen– und Innengrad 1 und seien (u, v) und (v, w) die zu v inzidenten Kanten. Der Knoten v und seine inzidenten Kanten werden gelöscht und eine Kante (u, w) eingefügt.

Parallele Reduktion Zwei Kanten der Form (u, v) werden durch eine Kante (u, v) ersetzt.

Zeigen Sie: Ein gerichteter Multigraph ist serien–parallel genau dann wenn er durch eine Folge serieller und paralleler Reduktionen zu einem Graphen, der aus einer Kante besteht, reduziert werden kann.

[bitte wenden]

Aufgabe 3: **4 Punkte**

Mit den in Aufgabe 2 eingeführten Reduktionen kann ein Dekompositionsbaum gewonnen werden. Dazu wird jede Kante mit einer Beschriftung versehen. Am Anfang ist jede Kante mit dem Baum, der aus einem Knoten besteht, beschriftet.

Serielle Reduktion Hat (u, v) die Beschriftung T_1 und (v, w) die Beschriftung T_2, so habe die neue Kante (u, w) als Beschriftung den Baum mit Wurzel S, die als linken Nachfolger T_1 und als rechten Nachfolger T_2 hat.

Parallele Reduktion Haben die beiden Kanten der Form (u, v) die Beschriftungen T_1 und T_2, so habe die neue Kante (u, v) als Beschriftung den Baum mit Wurzel P, die als linken Nachfolger T_1 und als rechten Nachfolger T_2 hat.

Zeigen Sie, dass der Baum, mit dem bei einer Folge serieller und paralleler Reduktionen eines serien-parallelen Multigraphen G die letzte Kante beschriftet ist, ein Dekompositionsbaum von G ist.

Aufgabe 4: **4 Punkte**

Betrachten Sie folgenden Algorithmus.

Eingabe: Ein gerichteter Multigraph G mit einer Quelle s und einer Senke t.
Ausgabe: Ein Dekompositionsbaum, falls G serien–parallel ist.

1. Füge alle Knoten außer s und t in eine Liste.
2. Solange noch Knoten in der Liste sind
   (a) Entferne einen Knoten v aus der Liste.
   (b) Solange es mindestens zwei Kanten gibt, die in v hineinführen wähle zwei Kanten der Form (u_1, v), (u_2, v).
      i. Falls $u_1 = u_2$ wende die parallele Reduktion an.
      ii. Sonst breche die Schleife ab.
   (c) Solange es mindestens zwei Kanten gibt, die aus v herausführen wähle zwei Kanten der Form (v, u_1), (v, u_2).
      i. Falls $u_1 = u_2$ wende die parallele Reduktion an.
      ii. Sonst breche die Schleife ab.
   (d) Falls v Innen– und Außengrad 1 hat, seien (u, v) und (v, w) die zu v inzidenten Kanten.
      i. Wende die serielle Reduktion an, um v zu löschen.
      ii. Falls $u \neq s$ nicht in der Liste ist, füge u zur Liste hinzu.
      iii. Falls $w \neq t$ nicht in der Liste ist, füge w zur Liste hinzu.
3. Falls außer s und t noch Knoten in G übrig sind, war G nicht serien–parallel.
4. Sonst wende die restlichen parallelen Reduktionen auf die Kanten der Form (s, t) an.

Zeigen Sie, dass der Algorithmus korrekt ist, d.h. dass G wirklich nicht serien–parallel war, wenn am Ende noch mehr als zwei Knoten übrigbleiben. Überlegen Sie sich dann, dass der Algorithmus in linearer Zeit läuft.