Lösungen zum 8. Übungsblatt

Aufgabe 1

Beh.: L' ist nicht semi-entscheidbar
($\Rightarrow$ nicht entscheidbar)

Bew.: Annahme: L' ist semi-entscheidbar.

$\Rightarrow$ $\exists$ Turingmaschine $\mathcal{M}$, die genau die Wörter aus L' akzeptiert (aber sonst nicht immer undbed. hält).

Konstruiere TM für L^c:

- Schreibe vor die Eingabe eine 1
- Wende $\mathcal{M}$ an

Diese TM akzeptiert genau die Wörter $w \notin L$, also $w \in L^c$, und hält für andere Wörter nicht unbedingt

$\Rightarrow$ L^c ist semi-entscheidbar $\Rightarrow$ L ist eintscheidbar (da L und L^c semi-entscheidbar)

$\lightning$ Widerspruch $\Rightarrow$ L' ist nicht semi-entscheidbar.

Aufgabe 3

a) *Formulierung als Optimierungsproblem*

Gegeben: Endliche Folge $(n_1, n_2, \ldots, n_l)$, $n_i \in I\!N$.

Gesucht: Eine Permutation (also bijektive Abb.)

$$\pi : \{1, \ldots, l\} \to \{1, \ldots, l\}$$

so dass

$$W(\pi) = \sum_{i=1}^{l-1} c(n_{\pi(i)}, n_{\pi(i+1)})$$

minimal ist unter allen Permutationen, wobei

$$c(a,b) = \begin{cases} b - a & \text{falls } b \geq a \\ 2(a-b) & \text{falls } b < a \end{cases}$$

3b) Für eine aufsteigend (genauer: nicht-absteigend) sortierte Permutation π_0 gilt:

$$\begin{aligned} W(\pi_0) &= n_{\pi_0(2)} - n_{\pi_0(1)} + \\ &\quad n_{\pi_0(3)} - n_{\pi_0(2)} + \ldots + \\ &\quad n_{\pi_0(l)} - n_{\pi_0(l-1)} \\ &= n_{\pi_0(l)} - n_{\pi_0(1)} \end{aligned}$$

d.h. $W(\pi_0)$ ist der Abstand zwischen dem größten zum kleinsten Element.

Beh.: Für jede nicht sortierte Permutation π ist $W(\pi) > W(\pi_0)$

Bew.: Für aufsteigend sortierte Paare liefert c den Abstand, sonst liefert c den doppelten Abstand.

Da mindestens für ein Paar $(j, j+1)$ gilt $n_{\pi(j)} > n_{\pi(j+1)}$, wird ein Abstand doppelt gezählt.

Außerdem wird der Abstand vom größten zum kleinsten Element auch aufsummiert. Also ist insgesamt der Wert $W(\pi)$ größer als $W(\pi_0)$.

Aufgabe 4b

Definiere

$$L(n) := \begin{cases} n & \text{falls } b = 1 \\ 0 & \text{falls } b > 1 \text{ und } n = 0 \\ \lfloor log_b(n) + 1 \rfloor & \text{sonst} \end{cases}$$

Damit ist

$$|s_b(n_1, \ldots, n_l)| = l - 1 + \sum_{i=1}^{l} L(n_i)$$

Aufgabe 4c

Beh.: s_2 und s_{10} sind äquivalent.

Bew.: Da $log_2(n) < log_{10}(n)$ für $n > 1$ ist

$$(|s_2(I)| = n \Rightarrow |s_{10}(I)| \leq p(n)$$

mit $p(n) = n$ erfüllt.

Weiter gilt mit $q(n) = log_2(10) \cdot n$:

$$(|s_{10}(n_1, \ldots, n_l)| = l - 1 + \sum_{i=1}^{l} \lfloor log_{10}(n_i) + 1 \rfloor = n$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \qquad & |s_2(n_1, \ldots, n_l)| \\
= \quad & l - 1 + \sum_{i=1}^{l} (\lfloor log_2(n_i) + 1 \rfloor) \\
= \quad & l - 1 + \sum_{i=1}^{l} \lfloor log_2(10) \cdot log_{10}(n_i) + 1 \ \rfloor \\
\leq \quad & q(n)
\end{aligned}$$