Lösungen zum 5. Übungsblatt

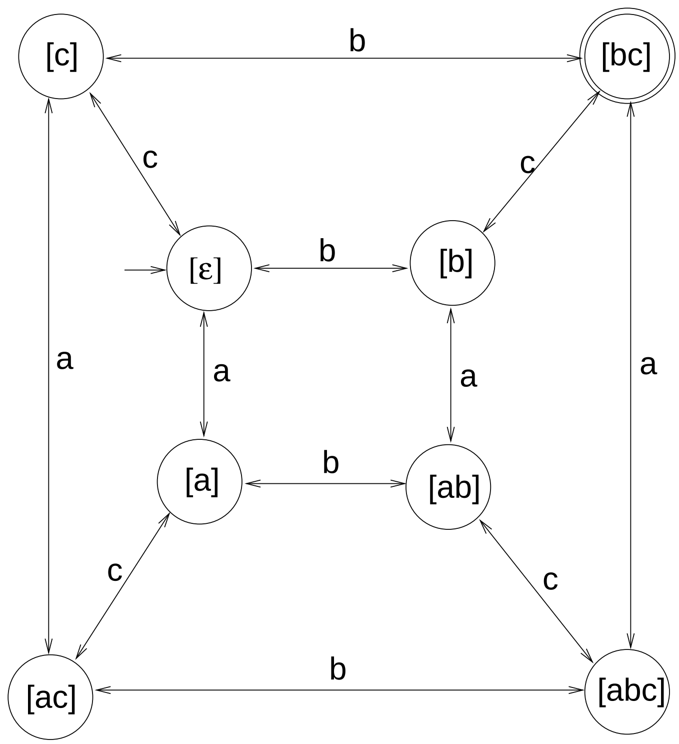
Aufgabe 3

$$L = \{w \in \Sigma^*; |w|_a \equiv 0 \text{ mod } 2, |w|_b \equiv |w|_c \equiv 1 \text{ mod } 2\}$$

Beh.: Die Äquivalenzklassen der Nerode-Relation sind

$$[a^i b^j c^k] = S_{ijk} := \{w \in \Sigma^*;\ |w|_a \equiv i, |w|_b \equiv j, |w|_c \equiv k \quad \text{mod } 2\}$$

für $i, j, k \in \{0, 1\}$. Damit ist der Automat der Nerode-Relation:



Bew.:

1. „$\subset$": Sei $w \in [a^i b^j c^k]$. Betrachte $v = a^i b^{1-j} c^{1-k}$. Dann ist $a^i b^j c^k \cdot v = a^{2i} b^1 c^1 \in L$, und da $w \approx_{R_L} a^i b^j c^k$ auch $wv \in L$. Damit ist

$$
\begin{array}{lll}
|wv|_a \equiv 0 & \Rightarrow |w|_a \equiv -i \equiv i & \text{mod } 2 \\
|wv|_b \equiv 1 & \Rightarrow |w|_b \equiv j & \text{mod } 2 \\
|wv|_c \equiv 1 & \Rightarrow |w|_c \equiv k & \text{mod } 2
\end{array}
$$

   Also $w \in S_{ijk}$.

2. „$\supset$": Sei $w \in S_{ijk}$ und $v \in \Sigma^*$ und $w' = a^i b^j c^k$. Dann gilt

$$
\begin{array}{ll}
 & |wv|_x \equiv |w' \cdot v|_x \text{ mod } 2 \quad (x \in \{a, b, c\}) \\
\Rightarrow & (wv \in L \Leftrightarrow w'v \in L) \\
\Rightarrow & w \approx_{R_L} w' \\
\Rightarrow & w \in [a^i b^j c^k].
\end{array}
$$

3. $\cup_{i,j,k}[a^i b^j c^k] = \Sigma^*$. $\surd$

$\blacksquare$

Aufgabe 4

$$L' = \{w \in \Sigma^*; |w|_a = |w|_b\}$$

Beh.: $ind(R_{L'})$ ist nicht endlich.

Bew.: Die Äquivalenzklassen $[a^n]$ für $n \in I\!N$ sind alle verschieden: Sei $i \neq j$ und $v = b^i$.

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad a^i b^i \in L \text{ und } a^j b^i \notin L \\ &\Rightarrow \quad a^i \not\approx_{R_{L'}} a^j \\ &\Rightarrow \quad [a^i] \neq [a^j]. \end{aligned}$$

■

Mit dem Satz von Nerode (2.26) folgt dann, dass die Sprache L' nicht regulär ist.