Klausur:	**Haupttermin**	**Mo, 15.07.2002, 12:00 - 14:00 Uhr, R611**
	Nachtermin	**Mi, 09.10.2002, 14:00 - 16:00 Uhr, R711**

11. Übungsblatt

Ausgabe: 27. Juni 2002 **Abgabe:** 5. Juli 2002

Problem PARTITION
Gegeben: Endl. Menge M, Gewichtsfunktion $w : M \to \mathbb{N}_0$.
Frage: Existiert Teilmenge $M' \subseteq M$ mit

$$\sum_{a \in M'} w(a) = \sum_{a \in M \setminus M'} w(a)$$

Aufgabe 1: Zeigen Sie, dass PARTITION $\mathcal{NP}$-vollständig ist.
[Hinweis (s. Vorlesung): Benützen Sie als polynomiale Transformation SUBSET SUM $\propto$ PARTITION: Transformieren Sie ein Problembeispiel (M, w, K) zu SUBSET SUM in ein Problembeispiel (M^*, w') zu PARTITION, wobei $M^* := M \cup \{b, c\}$, $w'(a) := w(a)$ für $a \in M$, und $w(b) := N - K$, $w(c) := K + 1$ mit $N := 1 + \sum_{a \in M} w(a)$.] **4 Punkte**

Aufgabe 2:

a) Gibt es eine polynomiale Transformation 3SAT $\propto$ PARTITION?

b) Angenommen, es gibt einen polynomialen Algorithmus $\mathcal{A}$ zur Lösung von PARTITION. Wie kann man $\mathcal{A}$ benützen, um einen polynomialen Algorithmus für 3SAT zu konstruieren?

4 Punkte

Aufgabe 3: Geben Sie für das Problem Allgemeines KNAPSACK ein Problembeispiel I an (also eine Menge M mit m Elementen, Kosten- und Gewichtsfunktionen w und c, und ein Gesamtgewicht W), so dass der Greedy-Algorithmus $\mathcal{A}$ aus Satz 4.33 eine Lösung liefert mit

$$\frac{OPT(I)}{\mathcal{A}(I)} > 1.99$$

4 Punkte

Problem CLIQUE-OPT (Optimierungs- bzw. Optimalwertversion)
Gegeben: Graph $G = (V, E)$
Frage: Gib die Größe einer maximalen Clique $V' \subseteq V$ in G an.

Aufgabe 4: In dieser Aufgabe beschäftigen wir uns mit der Optimierungsversion von CLIQUE, dem Problem CLIQUE-OPT. Wir wollen zeigen, dass es falls $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$ für CLIQUE-OPT keinen *absoluten Approximationsalgorithmus* $\mathcal{A}$ gibt (Satz 4.31 der Vorlesung).
Wir nehmen dazu an, dass es einen solchen absoluten Approximationsalgorithmus $\mathcal{A}$ für CLIQUE-OPT gäbe, also

$$|OPT(I) - \mathcal{A}(I)| \leq K$$

für alle Instanzen I und eine Konstante $K \in I\!N_0$.

Wir verwenden weiter folgende Konstruktion, die auch in der Vorlesung (Beweis zu Satz 4.36) benützt wird: Zu zwei Graphen $G_1 = (V_1, E_1)$ und $G_2 = (V_2, E_2)$ sei $G_1[G_2] = (V, E)$ mit

$$\begin{aligned} V &= V_1 \times V_2 \\ E &= \left\{ \{(u_1, u_2), (v_1, v_2)\} \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{entweder } \{u_1, v_1\} \in E_1 \\ \text{oder } u_1 = v_1 \text{ und } \{u_2, v_2\} \in E_2 \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Jeder Knoten in G_1 wird also ersetzt durch eine Kopie von G_2 und jede Kante in G_1 durch Kanten zwischen allen Knoten der entsprechenden Kopien.

a) Zeichnen Sie die Graphen $K_3[K_2]$ und $K_2[G_w]$, wobei K_m der vollständige Graph mit m Knoten (je zwei Knoten sind durch eine Kante verbunden) und G_w ein Graph Ihrer Wahl mit 4 Knoten ist.

b) Zeigen Sie: Wenn eine maximale Clique in G die Größe k hat, so hat in $K_m[G]$ eine maximale Clique die Größe $k \cdot m$.

c) Zeigen Sie, wie Sie einen absoluten Approximationsalgorithmus dazu nutzen können, um CLIQUE-OPT in polynomialer Zeit optimal zu lösen.
[Hinweis: Konstruieren Sie zu einem Problembeispiel G für CLIQUE den Graph $K_{(N+1)}[G]$ und bestimmen sie aus dem Wert, den $\mathcal{A}$ für die Eingabe $K_{(N+1)}[G]$ liefert, die Größe einer maximalen Clique in G.
Dieses Verfahren ist analog zum Beweis von Satz 4.30.]

d) Wieso folgt damit die obige Behauptung?

8 Punkte