UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Informatik & Informationswissenschaft
Prof. Dr. D. Wagner / C. Fieß / M. Gaertler / F. Schulz

Klausur:	**Haupttermin**	**Mo, 15.07.2002, 12:00 - 14:00 Uhr, R611**
	Nachtermin	**Mi, 09.10.2002, 14:00 - 16:00 Uhr, R711**

10. Übungsblatt, Version 2

Ausgabe: 20. Juni 2002 **Abgabe:** 28. Juni 2002

Sei G ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ mit $V = \{1, \ldots, n\}$

Definition:

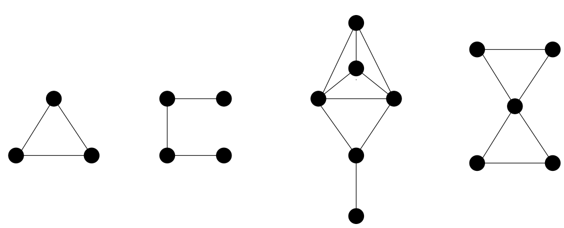
- Ein *Vertex Cover* von G ist eine Teilmenge $V' \subseteq V$, so dass für alle $\{u, v\} \in E$ mindestens einer der Knoten u und v zu V' gehört.
- Ein *Hamilton Cycle* in G ist ein einfacher Kreis, der alle Knoten enthält, also eine Permutation π auf V, so dass $\{\pi(i), \pi(i+1)\} \in E$ für $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ und $\{\pi(n), \pi(1)\} \in E$.
- Ein *Hamilton Path* in G ist ein einfacher Pfad, der alle Knoten enthält, also eine Permutation π auf V, so dass $\{\pi(i), \pi(i+1)\} \in E$ für $i \in \{1, \ldots, n-1\}$.

Problem VERTEX COVER
Gegeben: Ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und ein Parameter $K \leq |V|$.
Frage: Gibt es in G ein Vertex Cover der Größe höchstens K?

Problem HAMILTON CYCLE
Gegeben: Ungerichteter Graph $G = (V, E)$ mit $V = \{1, \ldots, n\}$
Frage: Gibt es in G einen Hamilton Cycle?

Problem HAMILTON PATH
Gegeben: Ungerichteter Graph $G = (V, E)$ mit $V = \{1, \ldots, n\}$
Frage: Gibt es in G einen Hamilton Path?

Aufgabe 1: Bestimmen Sie in folgenden Graphen eine maximale Clique, und prüfen Sie ob die Graphen einen Hamilton Cycle enthalten:



4 Punkte

[bitte wenden]

Aufgabe 2: Der „Kantenkomplementgraph" von G ist $G^c = (V, E^c)$ mit
$E^c = \{\{u, v\} : u, v \in V, u \neq v, \{u, v\} \notin E\}$.

a) Zeigen Sie folgende Äquivalenz:

$$V' \text{ Clique in } G \;\Leftrightarrow V - V' \text{ Vertex Cover in } G^c$$

b) Bestimmen Sie für die Graphen aus Aufgabe 1 den Kantenkomplementgraph G^c und verifizieren Sie, dass für jede maximale Clique V' aus Aufgabe 1 $V - V'$ ein minimales Vertex Cover in G^c ist.

c) Zeigen Sie, dass VERTEX COVER $\mathcal{NP}$-vollständig ist.
[Hinweis: Zeigen Sie
   1. VERTEX COVER $\in \mathcal{NP}$ und
   2. CLIQUE $\propto$ VERTEX COVER]

6 Punkte

Aufgabe 3: Das Problem HAMILTON CYCLE ist $\mathcal{NP}$-vollständig (ohne Beweis). Sei $v \in V$ ein beliebiger Knoten. Definiere $G' := (V', E')$:

- $V' := V - \{v\} \cup \{v_1, v_2, u_1, u_2\}$ und
- $E' := E - \{\{v, w\}; w \text{ Nachbar von } v \text{ in } G\} \cup \{\{v_1, w\}, \{v_2, w\}; w \text{ Nachbar von } v \text{ in } G\} \cup \{\{v_1, u_1\}, \{v_2, u_2\}\}$

G' wird also aus G konstruiert, indem der Knoten v „dupliziert" wird zu v_1 und v_2, und zusätzlich zwei neue Knoten u_1 und u_2 eingefügt werden, wobei u_1 nur eine Kante zu v_1 und u_2 nur eine Kante zu v_2 hat.

a) Zeigen Sie folgende Äquivalenz:

$$G \text{ enthält einen Hamilton Cycle } \;\Leftrightarrow G' \text{ enthält einen Hamilton Path}$$

b) Bestimmen Sie für die Graphen aus Aufgabe 1 den Graph G' und verifizieren Sie die Äquivalenz aus a).

c) Zeigen Sie, dass HAMILTON PATH $\mathcal{NP}$-vollständig ist.

6 Punkte