

5. Übungsblatt

Ausgabe: 13. Mai 2002 **Abgabe:** 20. Mai 2002, 10 Uhr
Die Bearbeitung in Zweiergruppen ist ausdrücklich erwünscht.

Aufgabe 1:

4 Punkte

Die *Spur* einer quadratischen Matrix ist die Summe ihrer Diagonaleinträge. Sei A die Adjazenzmatrix eines schlichten ungerichteten Graphen G . Sei m die Anzahl der Kanten in G und t die Anzahl der Dreiecke, d.h. der Kreise der Länge drei, in G . Zeigen Sie, daß $\text{Spur}A^2 = 2m$ und $\text{Spur}A^3 = 6t$ gilt.

Aufgabe 2:

4 Punkte

Sei G eine Gruppe und $X \subseteq G$ eine Teilmenge. Der *Cayley-Graph* $\mathcal{C}(G, X)$ zu (G, X) ist der Graph mit Knotenmenge G und Kantenmenge $\{(g, h) \in G \times G; hg^{-1} \in X\}$.

- (a) Zeigen Sie, daß es zu allen $g, h \in G$ einen Automorphismus von $\mathcal{C}(G, X)$ gibt, der g auf h abbildet. (**Hinweis:** Betrachten Sie Abbildungen $x \mapsto xg$, $g \in G$.) Daraus folgt insbesondere, daß es nur einen normierten Knotenstrukturindex auf der Klasse der nicht-isomorphen Cayley-Graphen gibt.
- (b) Zeigen Sie, daß ein einfacher Kreis ein Cayley Graph ist.

Aufgabe 3:

4 Punkte

Zeigen Sie, daß sich die Breitensuchnummern adjazenter Knoten eines ungerichteten Graphen höchstens um eins unterscheiden, d.h. daß

$$\{v, w\} \in E \implies |BFS(v) - BFS(w)| \leq 1.$$

[bitte wenden]

Aufgabe 4:**4 Punkte**

Ein Graph $G = (V, E)$ heißt *bipartit*, wenn es eine Partition $V = X \cup Y$ der Knotenmenge in zwei disjunkte Teilmengen X und Y gibt, so daß $E \subseteq X \times Y \cup Y \times X$ ist.

- (a) Zeigen Sie, daß ein ungerichteter Graph genau dann bipartit ist, wenn er keine Kreise ungerader Länge enthält.
- (b) Bestimmen Sie Funktionen `ROOT`, `TRAVERSE` und `DONE` so, daß in einer Breitensuche getestet wird, ob ein zusammenhängender ungerichteter Graph bipartit ist.

Aufgabe 5:**Keine Wertung**

Implementieren Sie eine Klasse `Breitensuche` und eine davon abgeleitete Klasse, die bestimmt, ob ein Multigraph bipartit ist. Können Sie den Algorithmus so erweitern, daß er ein *Zertifikat*, d.h. einen ungerichteten Kreis ungerader Länge bzw. eine entsprechende Partition der Knotenmenge, ausgibt?